Szalay István

Identitásnyomok a számfogalom kialakulásában

A számok, a számlálás és a számolás annyira átszövik mindennapjainkat, nem is nagyon gondolunk már arra, hogy a szám nem a természet adottsága, hanem az emberi elmének az emberi tevékenység során létrejött alkotása. A számok eredete annyira régi, hogy például, az 1, 2 és 3 szimbólumokkal jelölt számokat természetes számoknak nevezzük. Ugyanakkor tudjuk, hogy az ősidőkben nem így jelölték, továbbá akkor és manapság is, különféle nyelveken nevezik meg őket. Ez világosan utal arra, hogy a számokat vélhetően különböző időszakokban, a Földgolyó több helyén egymástól független civilizációk találták ki azonos tartalommal, de eltérő formájú megjelenítéssel. Egyes civilizációk identitása, amelyet a nyelv őriz, él az elnevezésekben, de eltűnt a forma globalizálódásával. Négy évezreddel ezelőtt még az egyiptomi és a mezopotámiai számjelek formavilága is tükrözte a létrehozó civilizációk identitását. A globalizálódás, vélhetően, az ókori egyiptomi, mezopotámiai és indiai (amely kapcsolatba került Kínával is) civilizációknak a hellénizmussal kiteljesedő talaján kezdődött. A római birodalom plántálta át a középkorba, amelynek során az arab és közvetítésével a hellén kultúra Európába érkezett. E folyamat során a különféle, már fejlettnek tekinthető számrendszerek legjobb tulajdonságai ötvöződtek. Ez azt jelenti, hogy a tartalom gazdagodásával együtt alakuló formában, ma már szinte láthatatlanul, de benne vannak a kapcsolódó civilizációk identitásnyomai. A téma tárgyalása során ezek közül mutatunk rá néhányra. Kitérünk, a számosság aktuális végtelenként történő megjelenésére és a robbantott számok elméletére is.

A számok nyelvi tartalma és formai megjelenítése

A legrégebbi idők vonatkozásában a beszélt nyelvet igen nehéz rekonstruálni. Gondoljunk például a Caesar szóra, amelyet latinul „Cézár”-nak ejtünk, de angolul „Szízör”-nek hangzik és ebből lett a német „Kaiser” és a magyar „császár” szavunk is. Ezek a példák arra utalnak, hogy a nyelv – a használó identitását tükrözve – maga után vonta az alaki változást is. A számokkal más a helyzet:

Tőszámnevek (számolás)

Egy (nyelvi identitás)	1 (globális jel)

Kettő	2
Három	3

Sorszámnevek (számozás)

Első	1.
Második	2.
Harmadik	3.

Felező számnevek

Másfél	1,5
Harmadfél	2,5

A bal oldali oszlopot csak magyarul értjük, a jobb oldalit minden művelt ember megérti függetlenül attól, hogy milyen nyelvet beszél. Sőt, a jobb oldal, akár magyar–angol szótárként is használható:

Tőszámnevek (számlálás)

One	1
Two	2
Three	3

Sorszámnevek (számozás)

First	1.
Second	2.
Third	3.

Felező számnevek

One and a half	1,5
Two and a half	2,5

A gyakorlatban a sor- és tőszámnevek keverednek, de a nyelvben őrzik a nemzeti identitást. Azonban, a számjelek globalizációja hosszabb távon ezt is legyűri. Például, azt a keltezést, hogy

Két(kettő)ezernyolc(adik év)   tizenegyedik hónap   tizenkettedike (nap) ma már senki sem használja, „régiesnek” az „Anno domini” kezdetű latin(!) dátum maradványának érzi, míg a

2008.11.12 vagy a 2008-11-12

keltezés nemzetközi szinten érthető. És ennek, még koránt sincs vége…

Természetesen, hosszú út vezetett idáig. Most próbáljunk visszamenni az ide vezető út néhány állomásán és megnézni, hogy milyen nemzeti identitások nyomták rá a bélyegüket a fenti keltezésben szereplő számjegyekre. Ma már tudjuk, hogy a két legnevezetesebb számjel, a

0

és az

1

számjelek. Ez akkor vált nyilvánvalóvá, amikor 1679-ben, Leibniz (1646–1716) német filozófus és matematikus Explication de l’Arithmétique Binaire című könyvében napvilágot látott a kettes számrendszer, amelyben e két számjeggyel bármilyen, az általunk használt tízes számrendszerben adott számot fel lehet írni: Például, ha a

$$667 = 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7$$

szám felírásakor a 10 hatványai helyett a 2

$$2^9 = 512......2^8 = 256.....2^7 = 128....2^6 = 64.....2^5 = 32....2^4 = 16.....2^3 = 8......2^2 = 4$$

hatványait használjuk, akkor a

$$667 = 1 \cdot 512 + 0 \cdot 256 + 1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 =$$

$$= 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 1010011011_2$$

kettes számrendszerbeli alakhoz jutunk. (A 1010011011_2 felírásban a 2-es alsó index jelzi, hogy kettes és nem tízes számrendszerben írtuk fel a számot.) Tekintve egy egyszerű áramkört, amelyben egy áramforrás, egy égő és egy kapcsoló van, a kapcsoló bekapcsolásával (az áram folyik és égő világít) illetve kikapcsolásával (az áram nem folyik és az égő nem világít) az 1 és a 0 elektronikusan és vizuálisan megjeleníthető kapcsolótábla

Bekapcs. Kikapcs. Bekapcs. Kikapcs. Kikapcs. Bekapcs. Bekapcs. Kikapcs. Bekapcs. Bekapcs.

állásánál az égő

Világít – Világít – – Világít Világít – Világít Világít

esetében éppen a 667 szám jelenik meg. Ez az a gondolat, amely létrehozta a XX. században a számítógépet.

Visszatérve a 0 és az 1 számok eredetéhez, azt mondhatjuk, hogy az 1 szám kinyomozhatatlanul régen keletkezett, nem véletlenül mondják sokan, hogy „az 1 az első természetes szám”. (A halmazelmélet térhódítása következtében ma már egyre kevesebben mondják ezt.) Mindenképpen mondhatjuk, hogy az 1 a legöregebb egész szám jele. Az *egy* a magyarban vitatott eredetű szó. Feltételezhetően 1. származékszó: a közelre mutató *e*-~ névmástőből (ez) alakult az l (> -ly > -gy) ablatívusraggal vagy esetleg egy *-gy* denominális névszóképzővel. Számnévi jelentése a vele már régen jelentéstani vonatkozásban és gyakori szintaktikai kapcsolatban állott *más*-hoz (eredeti jelentése *’az ott’*) viszonyítva fejlődhetett ki: *’ez itt’* → kettő közül az első, ’az egyik’ → *egy* formában. 2. szóhasadás eredménye is lehet (egyesek szerint); a finnugor eredetű *elő* névszó **el* tövének l > l ’> gy hangváltozással és ’elül lévő’ → első → *’egy’* jelentésfejlődéssel elkülönített változata. (Ez a magyarázat hangtani okból jóval kevésbé valószínű.)[415] A kettes számrendszert létrehozó Leibniz abban, hogy az összes számot az 1 és 0 segítségével fel lehet írni, párhuzamot látott a Biblia teremtés történetével, ami szerint Isten (1) a világot semmiből (0) teremtette.[416] Ugyanakkor történetileg a 0 a legfiatalabb nem – negatív egész szám jele! Tudunk például, válaszolni arra, hogy mi volt az a neve, amely már bizonyos értelemben a magyar nyelvi identitást tükrözi. Egy 1846-ban használt kolozsvári matematika tankönyvben a következő szerepelt:

„A czifra ollyan számbetű, melly magában számot nem tesz, de ha szám elé tétetik jobb felől, az a szám annyi tízet fog tenni, amennyi egyet foglal magában…”

Mai magyarsággal:

Ha egy szám mögé nullát írunk, a szám tízszeresét kapjuk.

Ezek szerint, akkor a „czifra” a mai „nulla” szó jelentetését hordozta. Ma már nem jelent nullát a „cifra” szó”. Ma a latin eredetű „nullát” használjuk. Akkor viszont, a nyelvújítás szellemében a latinnal szemben, magyarként kezelték. Pedig a cifra szó szanszkrit eredetű, amely arab közvetítéssel a latinba került, majd hozzánk, így a mi nyelvünkben jövevényszó. Végső forrása, amellyel zéró szavunk is etimológiai kapcsolatban van, az arab *sifr* ’üres’ nulla számjegy; az a szankszrit *sunya* ’üres, nulla’ tükörfordítása. Az arab szó a 13. század táján jutott be a latin matematikai műnyelvbe, illetve az európai nyelvekbe. A magyarba is latinból átvett (eredeti) jelentése ’zérus’, ’számjegy’ (1577) majd ’rejtjel’ (1644). A többi jelentései a magyarban alakultak (a különféle mesterségekben ugyanis a zérus jele, a köröcske gyakran szerepelt díszítő elemként. A cifra ’zérus’ mellett így létrejött a *cifráz, cifrál* ’köröcskékkel

[415] *A magyar nyelv történet– etimológiai szótára* (Főszerkesztő: BENKŐ Loránd) Budapest, Akadémiai Kiadó, 1967. I. 716.
[416] SAIN Márton, *Nincs királyi út!* Budapest, Gondolat Kiadó, 1986. 300.

díszít' jelentése).[417] Itt megszakítjuk a 0 történetét, amelyre a számjelek vonatkozásában még visszatérünk, de előbb vegyük szemügyre a latin nyelvet, amely a római birodalmi identitás kései megnyilvánulásaként nemcsak a matematika, hanem általában is a középkori Európa közös nyelve volt. Természetesen a világi és egyházi vezetők illetve a szolgálatukban álló „értelmiség" és nem egyes nemzetek többségét kitevő lakosság számára. Éppen emiatt lett a nemzeti identitások kitörésének egyik következménye a Biblia nemzeti nyelvekre történő lefordítása. Például, egy középkori egyetem matematikai stúdiumán a következőt láthatták a diákok:

Cubus p 6 rebus aequalis 20

Próbáljuk megfejteni, mit is jelent ez? A 6 és a 20 világosan mutatja, hogy ekkor már megjelentek Európában az „arab számok", de a fenti kifejezés olvasata még ekkor is

Cubus plus sex rebus aequalis viginti

volt. Nos, a „p"= „plus"= „plusz" = „+" az olvasatból nyilvánvaló. Az „aequalis" = „ egyenlő" eléggé kézenfekvő. A helyzet kulcsa a „rebus" = „rejtély" szóban van, aminek jelentése a mai matematikai szóhasználatban az „*x*" = „ismeretlen". Innen némi fantáziával eljuthatunk oda, hogy a „cubus" = „kocka" = „ x^3 ". Így a megfejtés:

$$x^3 + 6x = 20$$

Csak röptében nézzük meg, hogy milyen „nemzetközi együttműködés" történt addig, míg ezt a harmadfokú egyenletet a mai formájában leírhatták:.

– Az „arab számok" és az „*x*" bevezetése az araboktól származik, erre később visszatérünk.

– 1498-ban a „+" jel bevezetése Widman (1462-1498) német matematikus által

– 1557-ben az „=" jel bevezetése Recorde (1510- 1558) walesi matematikus által

– 1637-ben a $(\ )^3$ jel bevezetése Descartes (1596- 1650) francia filozófus, matematikus és fizikus által.

A fenti harmadfokú egyenlet

Rx ucu Rx 108 p 10 | m Rx ucu Rx 108 m 10

megoldását is megadták. (Az itt szereplő „x" nem az ismeretlen, hanem rövidítés. Például, „Rx ucu" = „radix universalis cubica" = „általános köbgyök", amelynek érvénye a $|$ jelig tart.) A megoldás mai leírása:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}\ ,$$

[417] *A magyar nyelv történet– etimológiai szótára* (Főszerkesztő: BENKŐ Loránd) Budapest, Akadémiai Kiadó, 1967. I. 428.

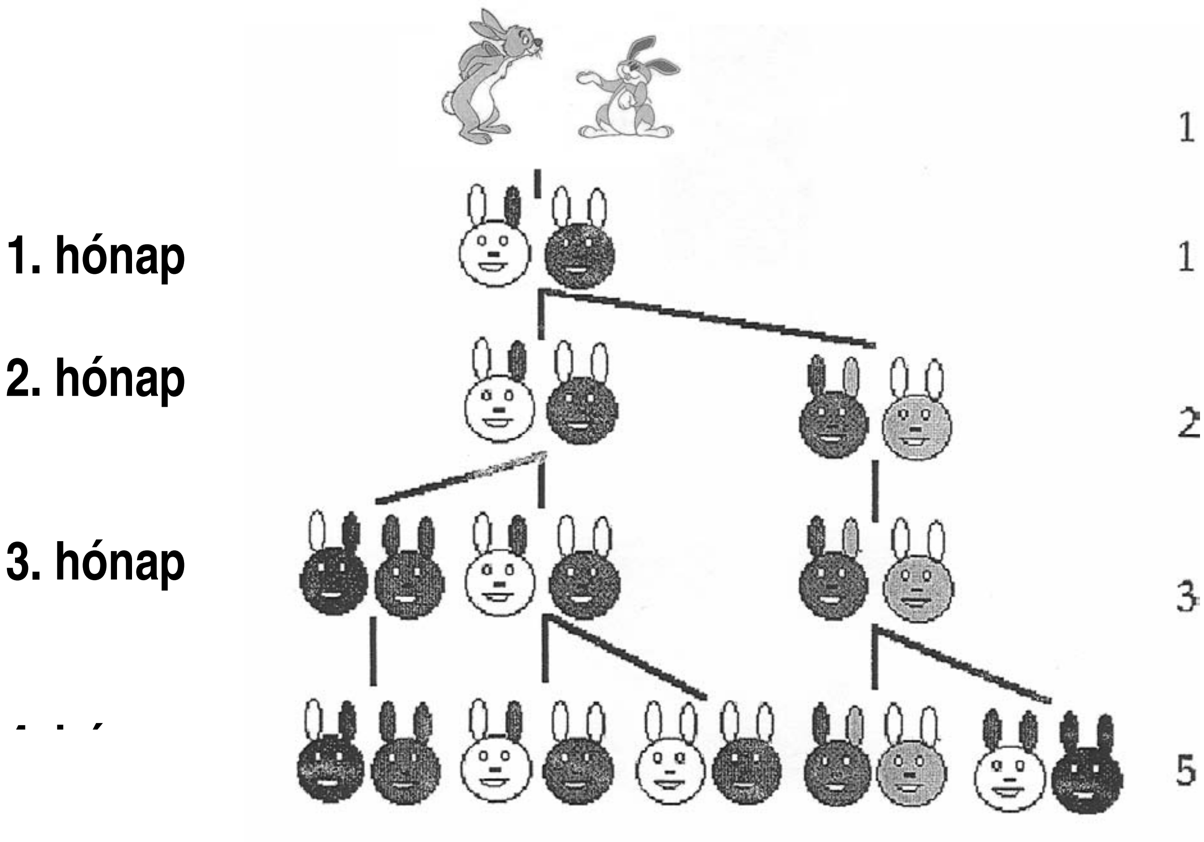
amihez kellett

– 1484-ben a $\sqrt{}$ jel bevezetése Chuquet (1445?–1500?) francia matematikus által

– 1498-ban a „-” jel bevezetése (Widman)

– 1637-ben a $\sqrt[3]{}$ jel bevezetése (Descartes)

Az „arab” számok európai elterjedését Fibonacci, más néven Leonardo Pisano (1170?–1240 után), 1202-ben megjelent Liber abaci című könyvétől számítjuk. Ebben a könyvben jelent meg a (többek között a „da Vinci kód” kapcsán) közismertté vált Fibonacci-sorozat. Könyvében egy olyan nyúlcsaládról van szó, amelyben minden egyes nyúlpár a második hónaptól kezdve, havonta, egy újabb nyúlpárnak ad életet. Az a kérdés, hogy ha az év elején egyetlen nyúlpárunk van, hány nyúlpárunk lesz az év végén? Ha az év elejét a 0-dik hónappal kezdjük, akkor ebben a hónapban és az ezt követő 1. hónapban még csak ez az egyetlen nyúlpárunk lesz. A 2. hónapban az eredeti nyúlpár mellett, szaporulatként egy újabb nyúlpár jelenik meg. A 3. hónapban az eredeti nyúlpár mellett egy még ifjabb szaporulat jelenik meg és ott van a 2. hónapban már meglévő szaporulat is:



Megfigyelés:

Ha a_n az *n*-edik hónapban meglévő nyúlpárok száma, akkor $a_0 = 1$ és $a_1 = 1$. Az *n*-edik hónap után következő (*n + 1*)-edik hónapban az *n*-edik hónapban meglévő nyúlpárok közül csak a legalább két hónaposak gyarapodnak, azaz, azok, akik már (*n* – 1)-edik hónapban is megvoltak. Képletben:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ezzel a „szaporodási képlet”-tel számolva, év végén

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + a_0 = 1+1 = 2\\
a_3 &= a_2 + a_1 = 2+1 = 3\\
a_4 &= a_3 + a_2 = 3+2 = 5\\
a_5 &= a_4 + a_3 = 5+3 = 8\\
a_6 &= a_5 + a_4 = 8+5 = 13\\
a_7 &= a_6 + a_5 = 13+8 = 21\\
a_8 &= a_7 + a_6 = 21+13 = 34\\
a_9 &= a_8 + a_7 = 34+21 = 55\\
a_{10} &= a_9 + a_8 = 55+34 = 89\\
a_{11} &= a_{10} + a_9 = 89+55 = 144
\end{aligned}$$

lesz a nyúlpárok száma.

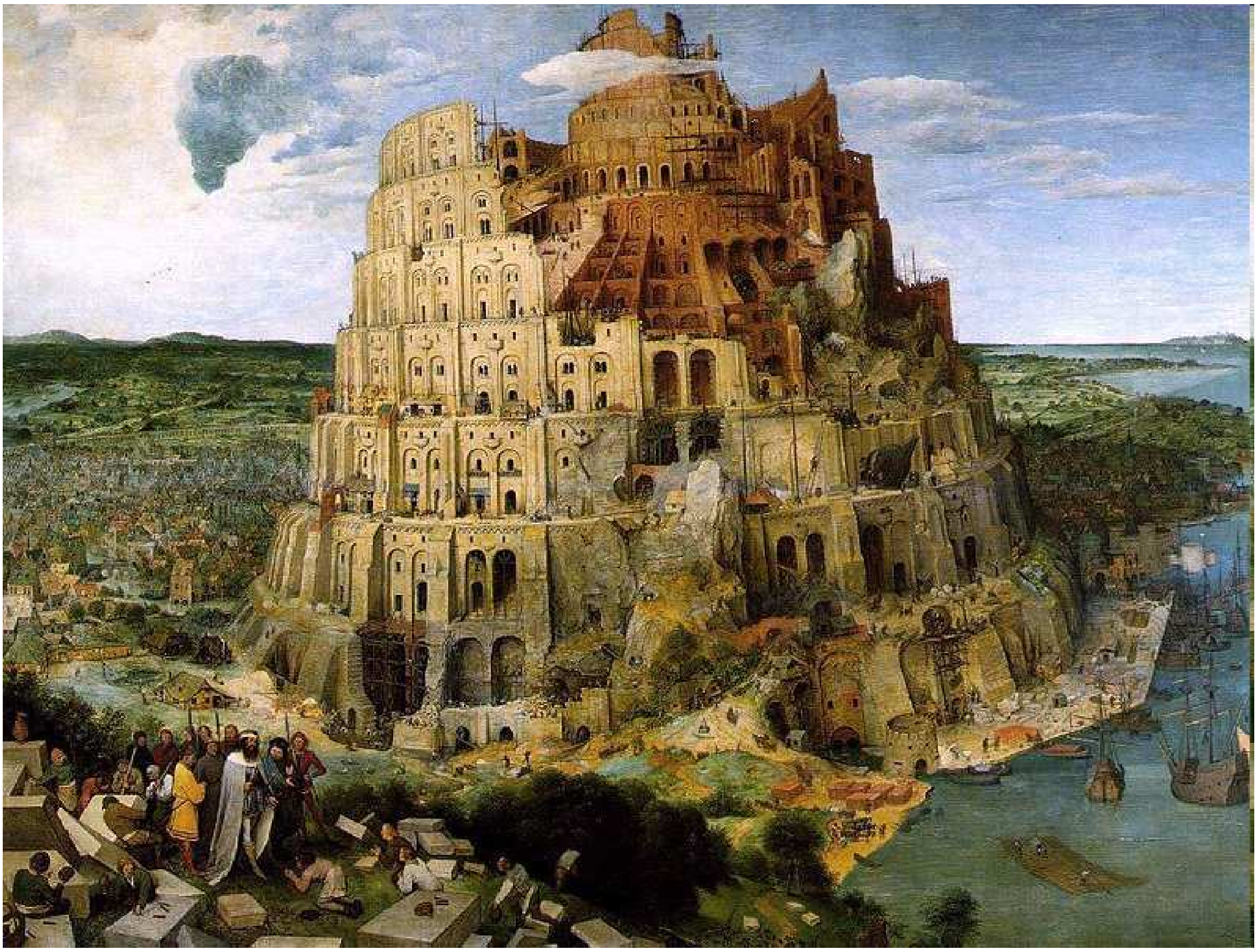
A matematikusi „lelkület” természetesen felteszi a kérdést, hogy mi van, ha, a nyúlcsalád tagjait halhatatlannak tekintve, az *n-edik* hónap végén vagyunk kíváncsiak a nyúlpárok számára. Erre ad választ a hihetetlennek tűnő

$$a_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}; n = 0,1,2,3,...$$

„explicit szaporodási képlet”. Egy kézi számológéppel ellenőrizhetjük, hogy

$$a_{11} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{12} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{12}}{\sqrt{5}} = 144,$$

de, ezt még akárki minősítheti szerencsés véletlennek, hiszen az „explicit szaporodási képlet” végtelenül sok állítást jelent. Hogyan lehet ezt bizonyítani? Olyan ez, mintha azt kérdeznénk, hogy égig érhet-e Bábel tornya?



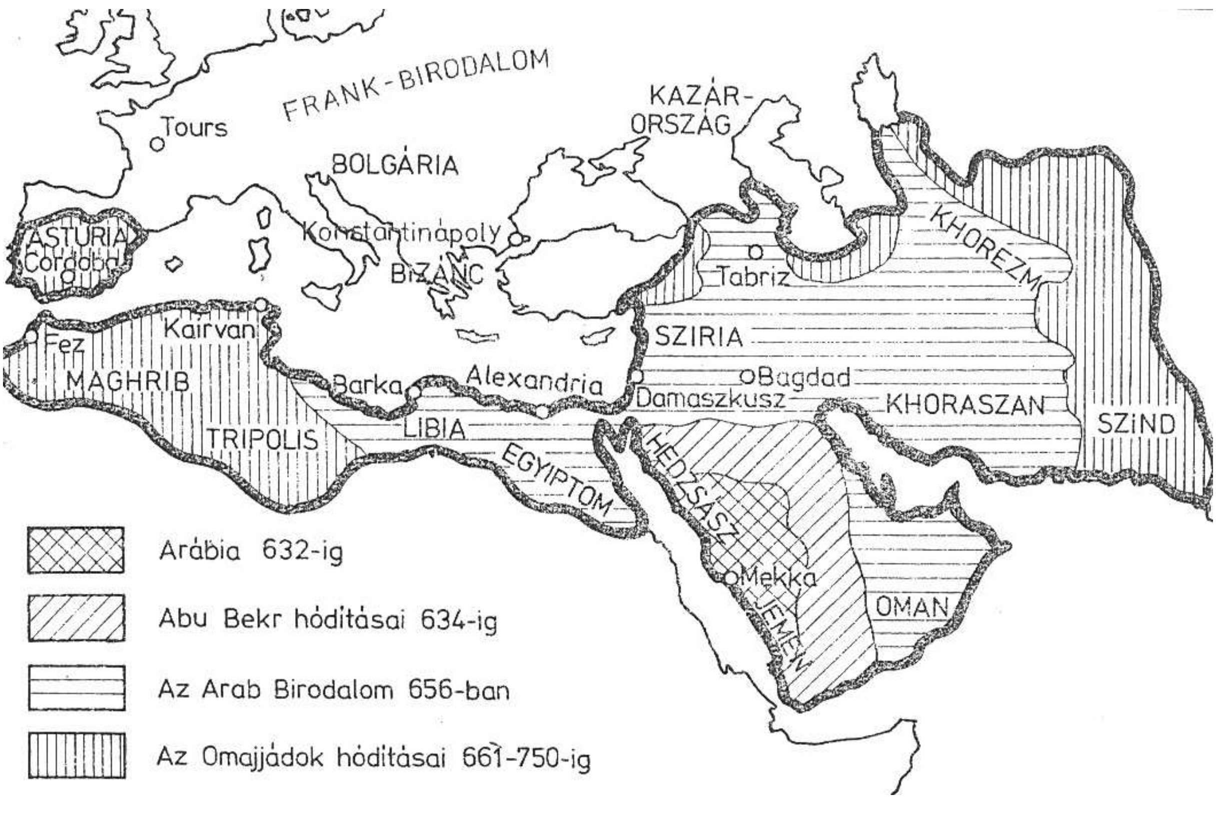
Bruegel (1525?–1569) flamand festő 1563-ban készült festménye (Wien, Kunsthistorisches Museum) alapján a válasz nyilvánvalóan tagadó. A matematika mégis képes felépíteni az égig érő tornyot, a következő meggondolás alapján:

– megmutatjuk, hogy megépíthetők a torony kezdeti emeletei

– feltéve, hogy eljutottunk az építkezésben valameddig, megmutatjuk, hogy a torony onnan tovább építhető.

Miért fogadható el ez az érvelés? Azért, mert senki sem tud olyan emeletet mondani, amely a fentiek teljesülése esetén ne lenne megépíthető. Ha ugyanis valaki kijelöl egy tetszőleges emeletet, és megkérdezi, hogy az miért építhető fel, arra azt válaszoljuk, hogy amiatt, mert az alatta lévő emeleteket megépítettük és onnan tovább építkezünk. De hogyan épültek az alatta lévő emeletek? Hát, az ő alattuk lévő emeletek építhetősége következtében. Így, lefelé haladva, eljutunk a kezdeti emeletekig, amelyekről már megmutattuk, hogy felépíthetők. (Ezt a bizonyítási eljárást a matematika „teljes indukciónak” nevezi. Elsőként Maurolico (1494-1575) itáliai bencés szerzetes, matematikus és csillagász 1575-ben megjelent Arithmeticorum libri duo című könyvében írja le, ahol bebizonyítja, hogy az első n páratlan természetes szám összege éppen n^2.)

Mint látjuk, a reneszánsz idején a latin nyelv még európai identitásként szerepel, de a számításokban a római számok helyét már átvették az arab identitást kifejező „arab számok”. Hogyan történt ez? Vessünk egy pillantást az arab birodalom kialakulására, amely az iszlám vallásalapító Mohamed próféta (570?–632) Mekkából Medinába, 622-ben történt menekülésével (hidzsra) kezdődött.



Az arab kalifák (különösen Al-Mamun (813–833), aki Bagdadban könyvtárral és csillagvizsgálóval ellátott „Bölcsesség házat” épített a tudósok számára) nagy művészet- és tudománypártolók voltak. 820-ban megjelent Al-Hvarizmi (780?–850?) *Kitáb al-dzsabr val mukábala* című korszakalkotó könyve. (Al-Hvarizmi nevét az „algoritmus” szavunk őrzi, az „al-dzsabr” pedig az „algebra” szavunk őse.) Al-Hvarizmi könyvében nemcsak az „arab számok”, hanem a „betűszámtan”, mai közkeletű nyelven az algebra játszotta a fő szerepet.

Ma, az algebra nyelvén fogalmazzuk meg, az összeadás és a szorzás legfontosabb tulajdonságait:

	Összeadás	**Szorzás**	
1.	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$	kommutativitás
2.	$(x + y) + z =$ $= x + (y + z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	asszociativitás
3.	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$		disztributivitás
4.	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$	egységelem létezése
5.	$x + (-x) = 0$	$x \cdot \frac{1}{x} = 1; x \neq 0$	inverzelem létezése

Mielőtt túlságosan unalmasnak találnánk ezt a táblázatot, tekintsük meg a következő levezetést!

Meglepetés
$a + b = c \quad /\cdot 4$ $4a + 4b = 4c$
$5c = 5a + 5b$ összeadva a fenti két sort:
$4a + 4b + 5c = 5a + 5b + 4c \quad /-9c$
$4a + 4b - 4c = 5a + 5b - 5c$
$4(a + b – c) = 5(a + b - c)$

$$4 = 5\ ?$$

Valahol hibának kell lennie! (A hiba megkeresése legyen az Olvasó feladata.)

Az arab matematika az arab hódítások szárnyán érkezett Európába, különösen Hispániába és Szicíliába. Al-Hvarizmi egy másik műve latin fordításban, Algorithmi de numero indorum címmel maradt ránk. Ez világosan mutatja, hogy a latinra fordító tudta, hogy az „arab" számok egy régebbi identitást, az indiait hordozzák. Ennek feltárásához, már az ókorba kell visszamennünk, de először nem Indiába, hanem Nagy Sándor (i.e. 336 – i.e. 323) hellén világbirodalmába, amely Egyiptomtól Indiáig terjedt. Valószínűleg ez volt az olvasztótégely, amelyben a mai 1 2 3 4 5 6 7 8 9 számjelek indiai ősei találkoztak a

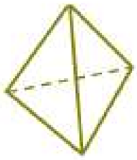
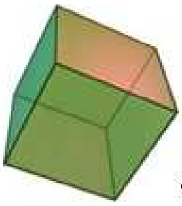
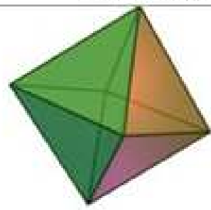
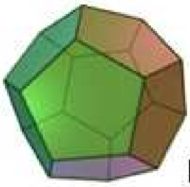
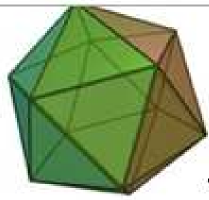
0

számjellel, amelyről tudjuk, hogy a görög o (omikron) betűből alakult ki, ami az

$$o\upsilon\delta\varepsilon\nu = \text{semmi}$$

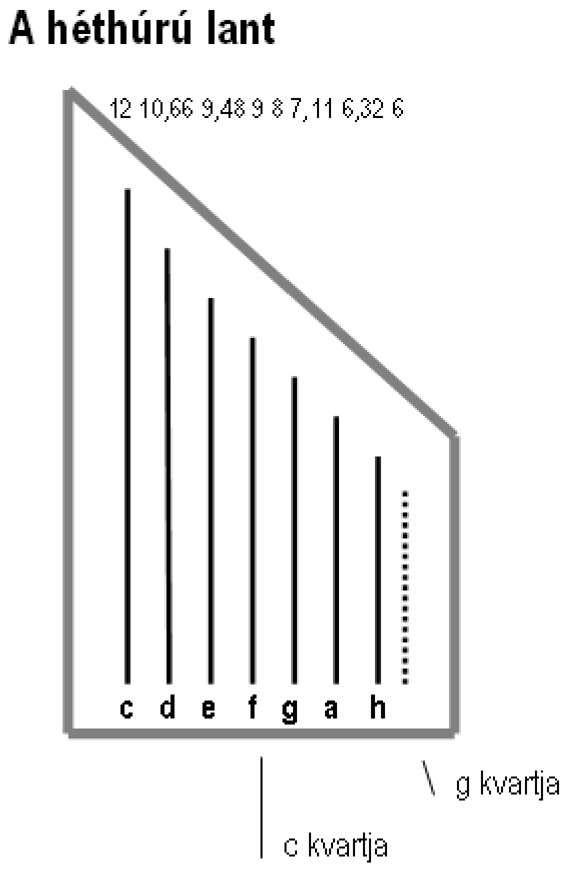
szó kezdő betűje.(A globalizáció erejét mutatja, hogy amikor a görög nyelvi identitást a latin váltotta fel, akkor a *nulla* = semmi ellenére sem változott a számjel „0"- ról „ *n*" -re.)

Arra, hogy hogyan kerülhetett a ragyogó eredményeket elérő görög matematikába a 0 még visszatérünk, de előbb szenteljünk figyelmet a gondolatokban rendkívül gazdag görögöknek! Kiemelendő, hogy Nagy Sándor után Egyiptom felett uralkodó utódai is igen nagy figyelmet szenteltek a tudományoknak. (Alexandriában, II. Ptolemaiosz (i.e. 285 – i.e. 246) alatt jött létre a hétszázezer tekercsből álló Bibliotheka, az i.e. 308-ban megnyílt „Muszeion"-ban.) A számfogalom vonatkozásában egyedülálló teljesítményt nyújtottak a püthagoreusok (i.e. 6. század), akik a számokat összekapcsolták a filozófiával, a természeti és társadalmi törvényszerűségekkel. A számokra alapozott zeneelméletük még napjainkban is alig túlhaladott. Két illusztráció munkásságukból:

Tetraéder	Hexaéder (kocka)	Oktaéder
 tűz	 föld	 levegő
L=4; É=6; C=4;	L=6; É=12; C=8;	L=8; É=12; C=6;
Dodekaéder	**Ikozaéder**	
 kozmosz	 víz	$L + C = É + 2$
L=12; É=30; C=20;	L=20; É=30; C=12;	

A szabályos testeket kapcsolatba hozták a világ görög filozófia szerinti alkotó elemeivel (tűz, föld, levegő, víz alkotják a Kozmoszt). Az oktaéder, dodekaéder, ikozaéder ma is hordozzák a görög nyelvi identitást. Figyeljünk fel a hexaédernél és az oktaédernél látható

12 8 6 számokra!



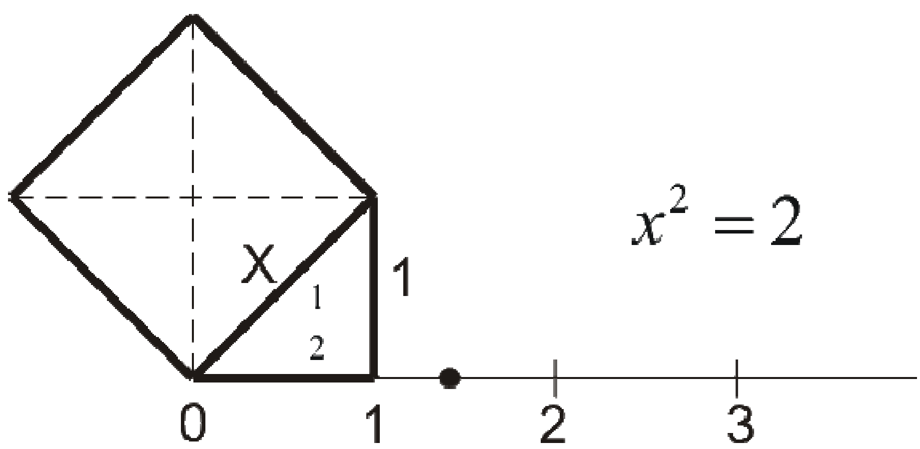
Figyeljünk fel, a „c” , „g” és „felső c” („g” kvartja) hangok

12 8 6

húrhosszaira!
A közöttük található

$$8 = \frac{1}{\frac{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}}{2}}$$

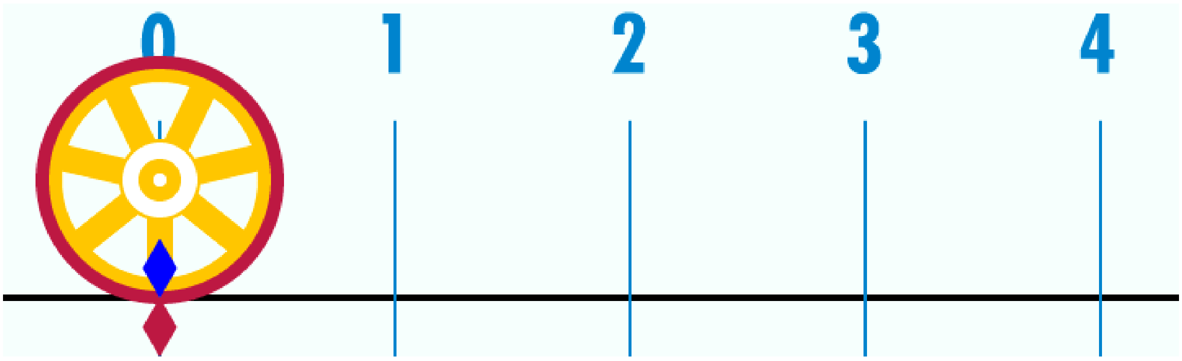
összefüggésből alakult ki a ma is használatos harmonikus közép (két szám reciproka számtani középének reciproka) fogalma. Az ilyen megfigyelésekből azt szűrték le, hogy az egész világ harmóniája az egész számokon és az egész számok arányán alapszik, emiatt ezekkel minden leírható. Az egész számok arányaiból keletkeztek a racionális számok. (Ekkoriban a görögök „szám”-on, mai szóhasználattal élve, a csak a pozitív racionális számot értették.)
A püthagoreusokra óriási csalódás várt! Tekintsük a következő ábrát!



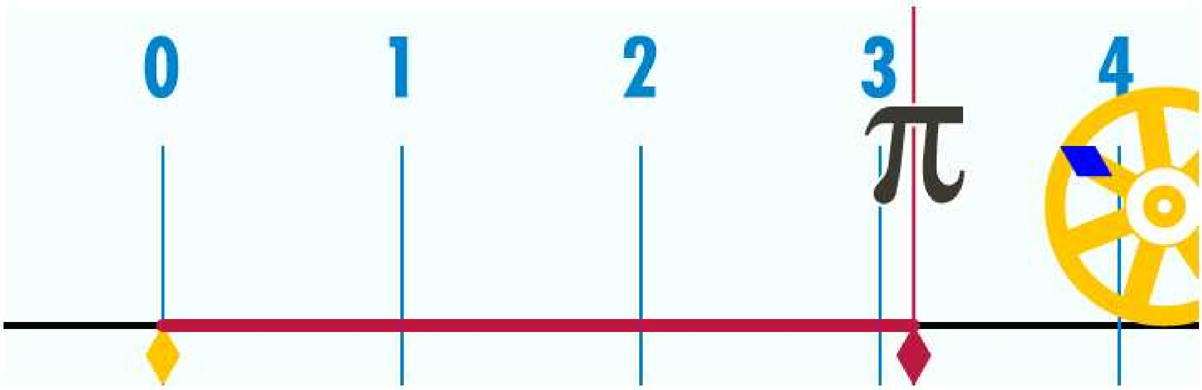
Jól látható, hogy az *x* oldalú négyzet területe 2 (terület egység). A püthagoreusok szerint kell, hogy legyenek olyan *p* és *q* természetes számok, hogy

$$x = \frac{p}{q}$$

teljesüljön. De, ilyeneket nem találtak, sőt kiderült, hogy nincsenek. (Ma középiskolában tanítjuk ennek igazolását.) Innen indul az „irracionális szám” (olyan szám, amely nem írható fel két egész szám hányadosaként) fogalmának bevezetése. (Az ábra $\bullet$ pontja a $\sqrt{2}$ helye a számegyenesen.) A két egész szám hányadosaként felírható számok (tört számok) a racionális számok. A számegyenesen még nagyon sok hely van…
Ezek után tekintsünk néhány nevezetes számot! A legnevezetesebb a π, amely azt fejezi ki, hogy bármely kör kerületének és átmérőjének hányadosa állandó. Könnyű elhelyezni a számegyenesen:



elgurítva az egységnyi átmérőjű kereket, kijelölhetjük a π helyét:



Vajon racionális szám -e a π? Az Ószövetség szerint igen, sőt egész szám és értéke 3. (Királyok könyve, 7.23, Krónikák 4.2.)[418]

Másik nagyon fontos nevezetes szám az Euler (1707–1783) svájci matematikus nevét hordozó *e* szám, amelyet a racionális számok az alábbi módon fognak közre:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n = 1,2,3,\ldots$$

Vajon racionális szám-e az *e*? Sem a π sem az *e* nem az! Sőt, mindkettő transzcendens (olyan irracionális szám, amely nem lehet semmilyen egész együtthatós algebrai egyenlet gyöke). A $\sqrt{2}$ irracionális, de nem transzcendens, hiszen (egyik) gyöke az $x^2 - 2 = 0$ algebrai egyenletnek. Természetesen, a $\sqrt{2}$ is megközelíthető racionális számok sorozatával, ezt mutatja a következő algoritmus: Legyen a_0 olyan racionális szám, amelyre $0 < a_0 < \sqrt{2}$, például, $a_0 = 1{,}4$. Ekkor az

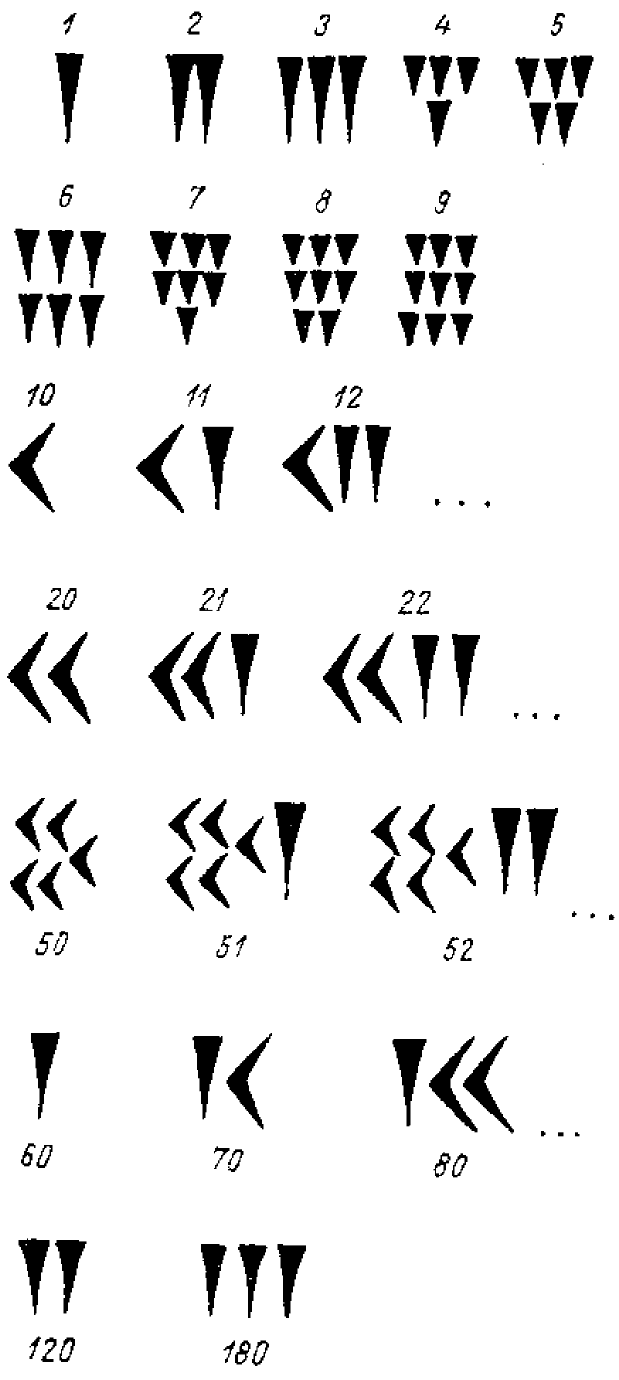
$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}; n = 0,1,2,3,...$$

[418] SZALAY István, Példák az általános műveltség matematikai összetevőire, In: *Kultúra – Művészet – Társadalom* (szerk. T. KISS Tamás), Szeged, Kiadta a Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kar Felnőttképzési Intézete, Szeged, 2007. 344–350.

képlettel számolt racionális számok sorozata (felülről) egyre jobban közelít a $\sqrt{2}$ értékéhez. Még mindig adósok vagyunk azzal, hogy hogyan tettek szert a görögök a

0

számra és miért az ő számjelük maradt fenn napjainkig? Hozzájuk a 0 (természetesen nem ebben a formában) az ókori Mezopotámiából került, ahol a számokat ékírással jelölték.



Kétféle jelet (ugyanannak az íróvesszőnek a két végét), ∇ „egyszerű” és $\langle$ „kapcsos” éket használtak, igen ötletesen. Az $\nabla;\nabla\nabla;\nabla\nabla\nabla$ még csupán a számlálásra utal (sorszámnevek) míg a

$$\begin{matrix}\nabla\nabla\nabla\\ \nabla\end{matrix}$$

már a 4 = 3 +1 az összeadást, a

$$\begin{matrix}\nabla\nabla\nabla\\ \nabla\nabla\nabla\end{matrix}$$

a 6 = 3 + 3 = 3 $\bullet$ 2 az összeadást illetve a szorzást fejezi ki. A $\langle$ „kapcsos” ék az akkádoktól származó 10 –es számrendszerre utal, amellyel az itt vázolt additív – multiplikatív módon az

$$59 \;=\; \begin{matrix}\langle\langle\langle & \nabla\nabla\nabla\\ \langle\langle & \nabla\nabla\nabla\\ & \nabla\nabla\nabla\end{matrix}$$

számig jutottak, majd egy nagyon váratlan fordulat következik:

$$60 = \nabla,$$

ami viszont a sumérok hatvanas számrendszerére utal és egyúttal a helyi értékes számolás (mai tudásunk szerinti) első megjelenése is. A helyi értékes hatvanas számrendszer, ellentétben a jól ismert tízes, és a már tárgyalt kettes számrendszerekkel szemben, a 60

$$.....60^4 = 12960000.......60^3 = 216000.......60^2 = 3600$$

hatványait használja. Például, a kettes számrendszerben már látott $667 = 1010011011_2$ szám a

$$667 = 11 \bullet 60 + 7$$

felbontás miatt Mezopotámiában a

$$667 \;=\; \begin{matrix} & \nabla\nabla\nabla\\ \langle\nabla & \nabla\nabla\nabla\\ & \nabla\end{matrix}$$

kétjegyű szám alakjában jelenik meg. (Megjegyezzük, hogy a számítógép ezt

$$1010011011_2 \;=\; \begin{matrix} & \nabla\nabla\nabla\\ \langle\nabla & \nabla\nabla\nabla\\ & \nabla\end{matrix}$$

formában érzékeli.)

Kezdetben, a mezopotámiai számok között sem szerepelt a nulla. Később ez zavart okozott, amit a sumér – akkád identitást mindmáig hordozó időmérésünk óra – perc – másodperc rendszerén érzékeltetünk: Csak a számjelet tartalmazó szövegkörnyezetből derül ki, hogy az

∇ „egyszerű” ék

1 vagy 60 vagy 3600

másodpercet jelöl, attól függően, hogy az, éket az „egyesek” vagy „hatvanasok” vagy „háromezerhatszázasok” helyén állónak képzeljük. (Ha az „egyesek” helyén áll, akkor önmagában van, ha a „hatvanasok” helyén áll, akkor szorzója a 60, ha a „háromezerhatszázasok” helyén áll, akkor szorzója a 60^2.) A nullát annak érdekében vezették be, hogy a szövegkörnyezettől függetlenül is kiderüljön a számjelek egyértelműsége. A nulla jelölésére a

$$\begin{matrix}\langle \\ \langle\end{matrix}$$

számjelet vezették be, amely után

$$\nabla = 1$$

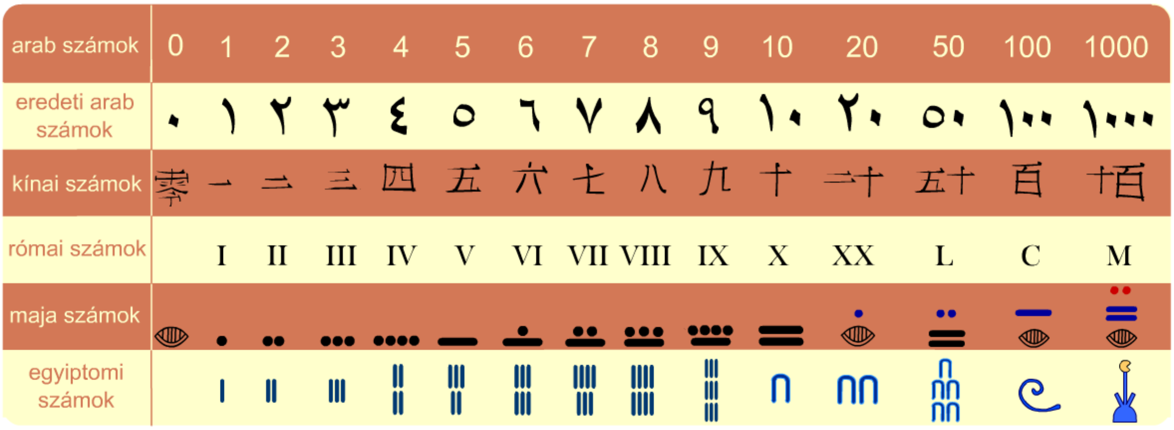
$$\begin{matrix}\nabla \langle \\ \langle\end{matrix} = 1 \bullet 60 + 0 = 60$$

$$\begin{matrix}\nabla\langle\ \langle \\ \langle\ \langle\end{matrix} = 1 \bullet 60^2 + 0 \bullet 60 + 0 = 3600$$

egyértelmű.

A babiloni csillagászat már az ókorban is igen fejlett volt, a görögök elsősorban tőlük tettek szert csillagászati ismereteikre és vették át a számításokat is de megszabadultak a jelölések nehézségeitől és vezették be a nullára a már látott o jelet. Így is történhetett…

De elképzelhető más út is, hiszen a mezopotámiai civilizáció mellett, több igen virágzó, nagy birodalmi háttérrel rendelkező civilizációról is tudunk. Egy kis ízelítő a számjeleikből.



Beszéljünk először, a mezopotámiai civilizációval egyidős egyiptomi Számokról! Az

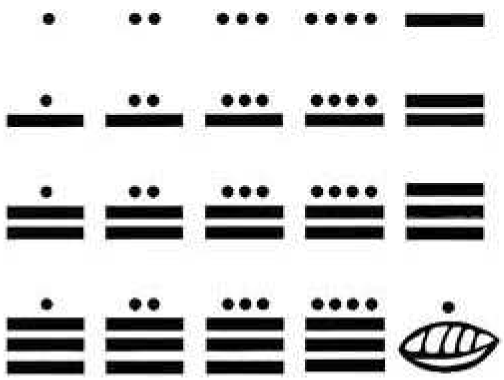
$$59 = \begin{array}{ll} \cap & ||| \\ \cap\cap & ||| \\ \cap\cap & ||| \end{array}$$

számig igen erős analógiát mutatnak a mezopotámiai számokkal. Azt hihetnők, hogy ennek oka a viszonylagos földrajzi közelség. Véleményünk szerint nem így van, az ok az emberi logika földrajzi elhelyezkedéstől lényegében független fejlődése. Ezt több indokkal is alá lehet támasztani. Egyiptom számrendszere nem hatvanas, hanem tízes és nem is helyi értékes. Ezt abból látjuk, hogy a 10 egyre növekvő kitevőjű hatványaira újabb és újabb jeleket vezettek be, ami korlátozta őket a nagyon nagy számok felírásában. Ez meg is akadályozta a számok vonatkozásában identitásuk fennmaradását. Ugyanakkor, elismeréssel kell adóznunk matematikai eredményeiknek, amelyek nélkül nem építhették volna meg piramisaikat.

Különösen érdekes a maja számok rendszere, az emberi logika újabb csodálatos megnyilvánulása, amely a mezopotámiai és az egyiptomi civilizációktól földrajzilag igen távol keletkezett. Számrendszerük húszas, helyi értékes számrendszer volt, amely a 20

$$\ldots 20^5 = 3200000 \ldots\ldots 20^4 = 160000 \ldots\ldots 20^3 = 8000 \ldots\ldots 20^2 = 400$$

hatványokra épül. Nullájuk is volt, amelyet a „kagyló” számjellel ábrázoltak. Számjeleik az 1-től a 20-ig:



A már többször említett 667 szám náluk $667 = 1 \bullet 400 + 13 \bullet 20 + 7$ miatt

•

•••

____

____

••

____

alakú.

A római számok matematikai szempontból fejletlenek. Nem helyi értékes számrendszer, nulla sincs benne. Számrendszerük természetesen tartalmazza az

1 = I

számjelet, egyébként pedig az ötös és tízes számrendszer ötvözetének tekinthető, amire az

5 = V   10 = X   50 = L   100 = C   500 = D   1000 = M

számjelek utalnak. A számok növekedésével egyre több számjelre volt szükségük, ezért nagyon – nagy számokat sem tudtak felírni. Érdekesség viszont, hogy a számjelek szerkezetére általában jellemző additív–multiplikatív szerkesztés mellett, egyedül a római számoknál jelenik meg a kivonás művelete:

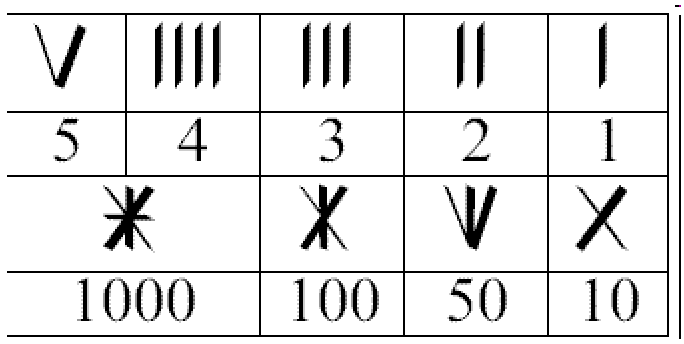
4 = IV = 5-1   9 = IX = 10 – 1   49 = IL = 50 -1.

Mivel magyarázható, hogy a római számok még mindig használatosak? Mielőtt erre felelnénk, nézzük meg, hogy általában mire használjuk a természetes számokat? A püthagoreusok (figyelembe véve az arányaikat is) még azt mondták, hogy „minden”-re. Ettől, már nagyon eltávolodtunk. Ha csak a természetes számokra szorítkozunk, akkor, azt mondjuk, hogy egyrészt a sorrendiség kifejezésére (sorszámnevek), másrészt műveletek végzésére (tőszámnevek). Nos, ma már a római számokkal műveleteket nem végzünk, de a sorrendiség (például, római birodalom jogi fejlettségét megőrző identitás nyomaként törvényeinket ma is római számozással látjuk el) kifejezésére igen.

Ugyancsak egyedi a kínai civilizáció. Nekik is volt nullájuk és elképzelhető az is, hogy a nulla nem a hellénizmus útján, hanem kereskedelem révén Kínából jutott Indiába. Kína számrendszere tízes és nem helyi értékes számrendszer, annak ellenére, hogy rendelkeztek nullával. (Ha helyi értékes lett volna a számrendszerük, akkor a 10-et és a 100-at, a „0” és az „1” jelek használatával írták volna fel. E helyett inkább új jeleket vezettek be. Az 1000 felíráshoz viszont az $1000 = 10 \bullet 100$ szorzás alapján a „10” és a „100” jeleit használták.)

Az „eredeti arab számokat” nem igen ismernénk fel, de a régi formában is jól felismerhető a helyi értékes tízes számrendszer. A globalizálódás folyamán „arab számok” értek a számok evolúciójának jelenlegi szintjére, ezért méltatásukat mellőzzük, de az indiai eredet tiszteletére idézzük Laplace (1749–1827) francia matematikus, fizikus és csillagász néhány méltató szavát. „A hinduktól jutott el hozzánk az a csodálatos számírási rendszer, amelyben minden szám felírható tíz jellel, azáltal, hogy minden jelnek alaki- és helyi értéket tulajdonít… egyszerűsége és a műveletek nagyon könnyű elvégezhetősége helyezi ezt az aritmetikai rendszert a leghasznosabb felfedezések sorába…”

A nulla és pozitív számok vonatkozásában mintegy négy évezredre való oknyomozó visszapillantásunk ezzel véget ért, de a magyar identitás kedvéért tegyük ide a magyar rovásírás számjeleit is:



Jól láthatóan, a | számjel után a 5 = V számjel következik (folytatás 6 = IV), a 10 = X jel a $10 = 5 + 5 = 5 \bullet 2$ alapján keletkezhetett, az 50 új jelet kapott, míg a 100 jele a

$$100 = 50 + 50 = 50 \bullet 2$$

logikáját tükrözi. Az 1000 ismét új jelet kapott. Őseink egy darabig elboldogultak ezzel is…

Néhány kérdésünk azért, még van!

Mi van a számegyenesen a 0-tól balra?

A mai válasz kézenfekvő: A negatív számok. Korábban, különösen Európában, ez korántsem volt így. Ennek illusztrálására idézzünk fel néhány, a negatív számokra használt, idegenkedő, pejoratív elnevezést!

Stifel (1487–1567) német matematikus, a másodfokú egyenletek megoldási módjának egységesítője, nem tudván mit kezdeni a pozitív együtthatójú

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , a , b \text{ és } c \text{ pozitív számok,}$$

másodfokú egyenlet negatív gyökeivel „abszurd” számoknak nevezte őket.

Cardano (1501–1576), olasz matematikus is fizikus, aki 1545-ben megjelent Ars magna sive de regulis algebraicis könyvében közli az

$$x^3 + px + q = 0$$

harmadfokú egyenlet (róla elnevezett, de nem általa felfedezett) megoldó képletét, a képletben megjelenő negatív számokat „fiktív” számoknak nevezte.

Descartes (1596–1650), akinek 1637-ben megjelent Discours de la Methode könyve Géometrie című függeléke a koordináta-geometriát indította fejlődésnek, számolt negatív számokkal, de „hamis” számoknak nevezte őket.

Mai tudásunk szerint a negatív számok először az

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

elsőfokú két ismeretlenes egyenlet rendszer megoldása során, Csang Csan (?– i.e. 152?) „Csiu csang szuan su” című munkájában fordultak elő. Innen juthatott Indiába, ahol a 6–9. századokban már számoltak az egyenletek negatív gyökeivel. (Innen, lassan szivároghatott az arabokhoz, mert Al-Hvarizmi már említett könyve még nem használja a negatív számokat.) Európában, a fejlődő kereskedelem a 12–15. századok során kényszerítette ki a negatív számok használatát. Ma, a számegyenesen, a 0-tól balra helyezzük el őket:

$-\pi$ $-e$ $-\sqrt{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\sqrt{2}$ e π

....o.........o.........o.........o........0........1.........•.........•.........•....

-4   -3   -2   -1   2   3   4

A számegyenest teljesen kitöltő racionális és irracionális számokat együttes néven valós számoknak nevezzük.

Vannak-e számok a számegyenesen kívül?

Ez attól függ, hogy milyen olyan problémák támadnak, amelyeket a valós számokkal nem tudunk megoldani. Ilyen például, a következő: A már említett $x^3 + 6x = 20$ harmadfokú egyenlet gyökeit keresve, már láttuk a kézi számológéppel könnyen nyerhető és behelyettesítéssel ellenőrizhető

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10} = 2$$

gyököt. Ennek tudatában harmadfokú egyenletünket

$$(x-2)(x^2+2x+10) = 0$$

alakba írhatjuk át, amelyet a szorzás elvégzésével ellenőrizhetünk. További gyök keresése az

$$x^2 + 2x + 10 = 0$$

másodfokú egyenlet megoldását kívánja. Másodfokú egyenletünket az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ algebrai azonosság használatával ismét átalakítva az

$$(x+1)^2 + 9 = 0$$

alakhoz jutunk. Mivel a baloldalon lévő első tag semmilyen valós x esetén sem lehet negatív, a 9-hez hozzáadva semmilyen valós x-re sem adódhat a jobb oldalon lévő 0. Ha viszont feltételezzük, hogy van olyan (nem valós) szám, aminek a négyzete (–1), akkor más a helyzet. Belemenve ebbe a hipotézisbe, jelöljük ezt a számot az i betűvel. Ekkor

$$-i^2 = -(-1) = 1$$

miatt, legutóbbi egyenletünk

$$(x+1)^2 - 9i^2 = 0$$

alakot ölt, amiből $9i^2 = (3i)^2$ alapján kapjuk, hogy

$$(x+1)^2 - (3i)^2 = 0\,.$$

Most az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ algebrai azonosság használatával a bal oldalt szorzattá alakítjuk:

$$(x+1-3i)(x+1+3i) = 0\,.$$

Látjuk, hogy

$$x = -1 + 3i \qquad \text{vagy} \qquad x = -1 - 3i$$

behelyettesítésével megkapjuk a jobb oldalon lévő nullát!

Mindezek a gondolatok, arab előzményekre támaszkodva, előfordultak a XVI. századi Európa matematikájában Ferro (1465–1526), Tartaglia (1500?–1557), a már említett Cardano, Ferrari (1522–1565) és Bombelli (1526–1572) munkásságában. Ugyanakkor tisztázandó kérdések egész sora merült fel, kezdve azzal, hogy létezik-e az *i* szám? Ha igen, akkor mit mondhatunk a vele kapott eredmények egyértelműségéről, hiszen a $(-i)^2 = (-i)(-i) = i^2 = -1$ is érvényes! Nem véletlen, hogy az

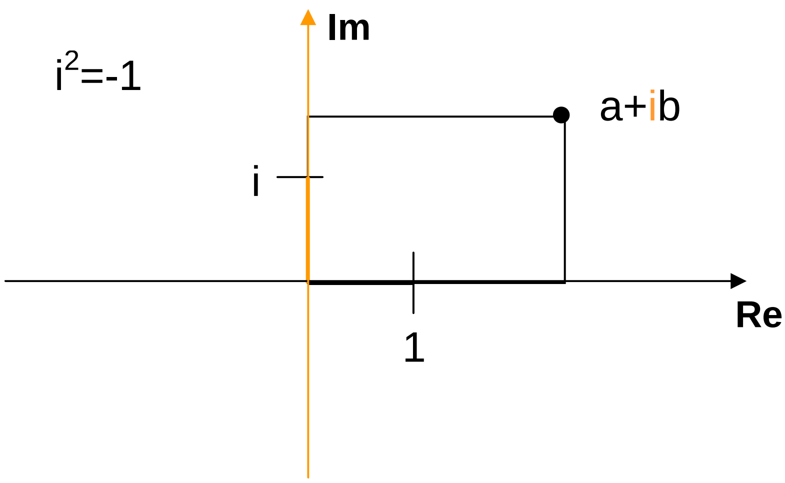
$$a + bi \quad , \quad a \text{ és } b \text{ valós számok}$$

alakú „számokat” a pejoratív tartalmat kifejező „imaginárius számok” elnevezéssel illették, amelyekről 1702-ben Leibniz, a következőket írta: „A képzetes számok - az isteni szellem e gyönyörű és csodálatos hordozói- már majdnem a lét és a nemlét megtestesítői.” Csak a 19. században tisztult ki a kép. 1831-ben Gauss (1777–1855) német matematikus az imaginárius számokat geometriailag, 1837-ben Hamilton (1805–1865) angol és Bolyai (1802–1860) magyar matematikusok algebrailag, tiszta alapokra helyezték. Ma már az imaginárius számok – nem utolsósorban a gyakorlati életben való alkalmazhatóságuk miatt – teljes elfogadottságot nyertek. A pejoratív elnevezés kiveszőben van, komplex számoknak nevezzük őket. Valamiben azonban nem tökéletesek. Nem lehet rájuk olyan kisebb, jelben: < relációt találni, hogy ha az $a_1 + b_1 i < a_2 + b_2 i$ két, egyébként tetszőleges komplex szám esetén teljesül, akkor bármely $a_3 + b_3 i$ komplex szám esetén

$$(a_1 + b_1 i) + (a_3 + b_3 i) < (a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)$$

is fennálljon. (A valós számokra fennáll, hogy ha egyik kisebb, mint a másik, akkor mindkettőhöz ugyanazt a harmadikat hozzáadva a kisebb reláció nem változik.)

A komplex számok nem férnek el a számegyenesen, ábrázolásuk számsíkon történik:



Az $a+0\cdot i = a$ komplex számok a számsík **Re** tengelyén elhelyezkedve, a valós számokat jelentik. A $0+bi=bi$ komplex számokat, amelyek a számsík **Im** tengelyén vannak, tiszta képzetes számoknak nevezzük.

A számfogalom szakadatlanul fejlődik. Egyik iránya Cantor (1845–1918) német matematikus 1874-ben publikált dolgozatában jelent meg. Ebben a számlálást terjesztette ki olyan halmazokra, amelyben lévő elemek számát egyetlen természetes számmal sem tudjuk megadni. Legszembetűnőbb ilyen halmaz éppen a természetes számok halmaza. Esetében már nem számról, hanem számosságról beszélünk. Számosságát Cantor „megszámlálhatóan végtelen számosságnak" nevezte, amelyet az

$$\aleph_0$$

szimbólummal jelölt. A „végtelen" fogalmát már érintettük a teljes indukcióval összekötött „Bábel tornya" esetében. Ekkor egy olyan építési folyamatot idealizáltunk, amelyben akármelyik emeletet felépíthetjük, de sosem láthatjuk az összes emeletet. Ez, filozófiai értelemben, potenciális végtelen. Az $\aleph_0$ filozófiai értelmezése viszont aktuális végtelen, ami megnyilvánul, az összeadás fogalmának halmazelméleti értelmezése alapján kiderülő, bármely *n* természetes számra vonatkozó

$$n+\aleph_0=\aleph_0$$

eredményben. Sőt, még az is kiderül, hogy

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0.$$

Térjünk vissza a számfogalom komplex számokig történő felépítéséhez (az eddigi témához szakirodalmat ajánlva[419]).

---

419 REMBECZKI Csaba, *A számfogalom felépítése*, 2008.december 27.00:53:13 GMT. Letöltve: 2009.január 19. <http://orange.ngkszi.hu/-trembe/szamok/001.html Google által tárolt változata.>
CSATÁRI Ferenc, *A számfogalom matematikatörténeti fejlődéséről*, 2009.január 12.19:58:01 GMT. Letöltve: 2009. január 19. <http:www.szv.hu/cikkek/a-szamfogalom-matematikatorteneti-fejlodeserol Google által tárolt változata.>
ORR, Robert, H., *Georg Cantor*, 2009. január 13. 00:13:10 GMT. Letöltve: 2009. január 19.
<http://www.engr.iupui.edu/-orr/Webpages/cpt120/mathbios/gcant.htm Google által tárolt változata>

Számkör neve	*Meghatározása*	*Jele*
1. Természetes	(1,2,3,... vagy 0,1,2,3,...)	**N / N$_0$**
2. Egész	(...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...)	**Z**
3. Racionális	(p/q: p, q egész és q nem 0)	**Q**
4. Irracionális	(pl. a négyzetgyök 5)	nincs (**Q***)
5. Valós	(racionális vagy irracionális)	**R**
6. Komplex	(a+bi, ahol a és b valós)	**C**

Veszteség: az összeadás és a szorzás monotonitása

Tovább haladásunkkor egy merész kérdést teszünk fel.

Áttörheti-e Bábel tornya a háromdimenziós tér (láthatatlan) határát?

Be fogjuk mutatni, hogy a válasz: igen! Ehhez azonban, egy új számfogalomra, a robbantott szám fogalmára van szükségünk. Először azokat a ξ valós számokat robbantjuk, amelyekre

$$-1 < \xi < 1.$$

A robbantást az

$$areath\xi = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}$$

függvénnyel hajtjuk végre. A robbantás tényét a ξ fölé tett „tálca” jelöli.(A 2 négyzetgyökét is a képzésére vonatkozó $\sqrt{2}$ jelöli.) A robbantás termékei betöltik a teljes számegyenest, minden valós szám egyúttal robbantott szám is. Tetszőleges x valós szám, a belőle képzett

$$\xi = thx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

robbantásával áll elő. Az $x \leq -1$ vagy $x \geq 1$ számok robbantottjait csupán a x fölé tett „tálca” jelzi, ezért ezeket a robbantottakat láthatatlan robbantott számoknak nevezzük. (Megkülönböztetésül, a valós számokat látható robbantott számoknak is hívhatjuk.) A láthatatlan robbantott számok nyilvánvalóan nincsenek a számegyenesen, de őseik, a valós számok, tulajdonságai alapján definiálni tudjuk, a robbantott számokra, a robbantott számok halmazában való egyenlőségüket és értelmezhetjük a „kisebb” fogalmat is. Angol szóhasználattal:

$$\overset{\sqcup}{\xi} = \operatorname{area\,th}\xi = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}.$$

any real number x is exploded real number

$$x = \overset{\sqcup}{\operatorname{th} x}, \quad x \in R, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

real numbers are *visible exploded real numbers.* Otherwise, we use the symbol $\overset{\sqcup}{x}$ for every real numbers

$$\overset{\sqcup}{x} \overset{\overset{\sqcup}{R}}{=} \overset{\sqcup}{y} \Longleftrightarrow x = y, \quad x, y \in R$$

$$\overset{\sqcup}{x} \overset{\overset{\sqcup}{R}}{<} \overset{\sqcup}{y} \Longleftrightarrow x < y, \quad x, y \in R.$$

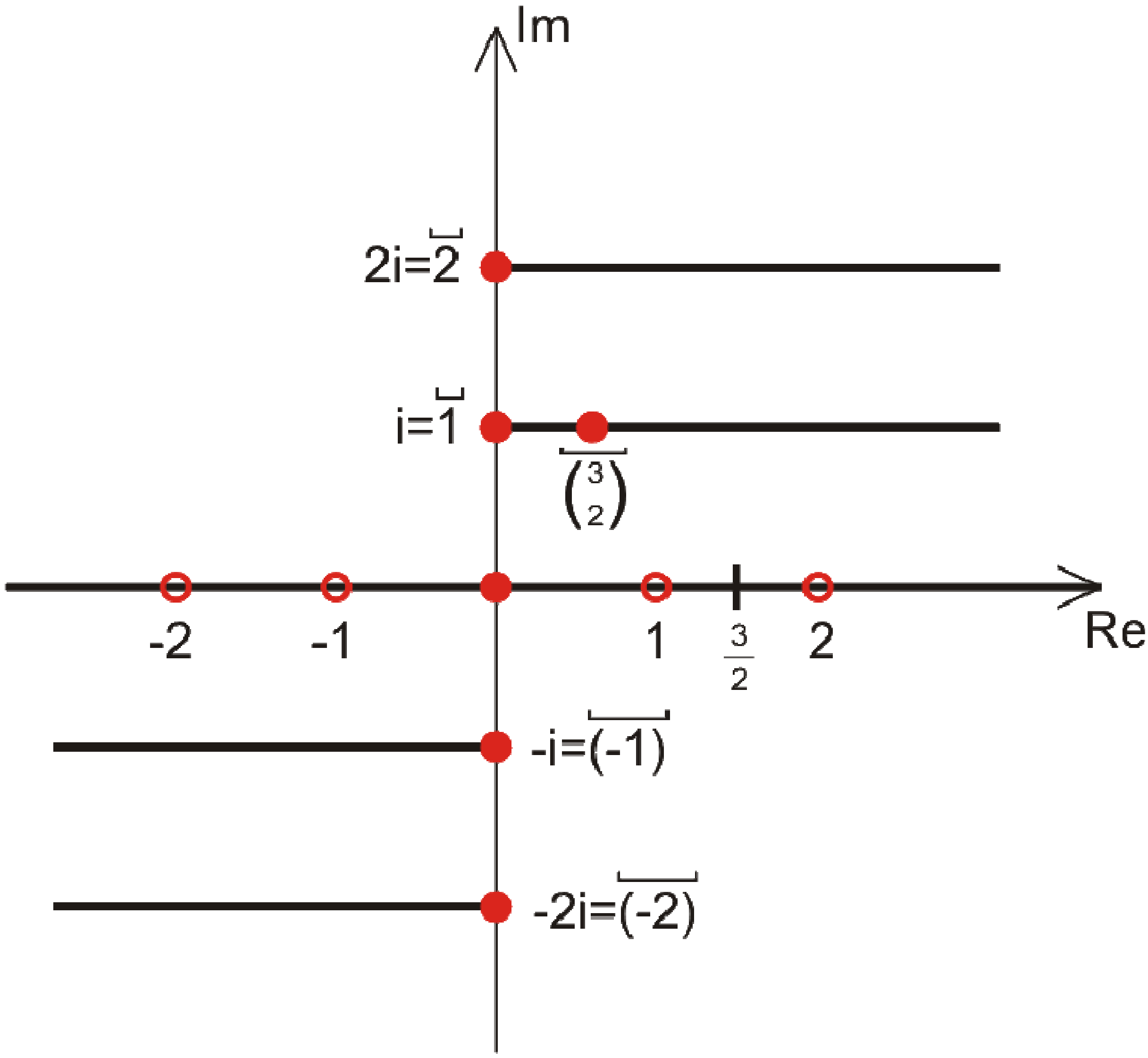
A „láthatatlan robbantott szám” fantazmagóriának minősíthető, mindaddig, amíg valamilyen modellt nem adunk rá. Mivel nem lehetnek láthatók, a számegyenesen, amit most egy dimenziós térként fogunk fel, a láthatatlan robbantott számokat láthatóként, a két dimenziós térnek tekinthető számsíkban, azaz a komplex számok között fogjuk modellezni. Ezt a következő képlettel valósítjuk meg:

$$\overset{\sqcup}{x} = (\operatorname{sgn} x)(\operatorname{area\,th}\{|x|\} + i[|x|]), \quad x \in R,$$

ahol,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1,......ha.....x.....pozitív \\ 0,......ha.....x = 0 \\ -1,....ha.....x.....negatív \end{cases} \qquad \text{és} \qquad |x| = \begin{cases} x,......ha.....x.....pozitív \\ 0,......ha.....x = 0 \\ -x,....ha.....x.....negatív \end{cases}$$

továbbá $[x]$, az x –nél nem nagyobb, legnagyobb egész szám és $\{x\} = x - [x]$. Például, az x=1,5 robbantottja $(\operatorname{sgn} 1{,}5)\left(areath\{|1{,}5|\} + i[|1{,}5|]\right) = areath\{1{,}5\} + i[1{,}5] = areath 0{,}5 + i \approx 0{,}55 + i$, komplex számként látható, noha az egy dimenziós térben láthatatlan robbantott szám. Az 1 robbantottja az i és a (-1) robbantottja a (-i) az egy dimenziós térben láthatatlan robbantott számok. A 0 az egyetlen szám, aminek robbantottja önmaga. Szemléletesen, a robbantott számok halmaza, a komplex számok halmazának, a valós számok halmazát tartalmazó, „zászló” alakú részhalmaza. (Lásd a következő ábrát, ami érzékelteti, hogy a robbantott számok a kétdimenziós tér elenyészően kis mértékű részét töltik ki.)



Azt, hogy az *u* robbantott szám kisebb, mint a *v* robbantott szám, az mutatja, hogy a „zászlón” az *u* a *v*-hez képest lefelé, vagy, ha egy szinten vannak, akkor a *v*-től balra helyezkedik el.
Az *u* robbantott szám esetén azt a valós számot, amelynek a robbantottjaként keletkezett, az *u* zsugorítottjának (angolul: compressed of *u*) nevezzük, amelynek jele az *u* alá tett „tálca”. A robbantott számok komplex modellje esetében: Ha *u* a „zászlón” lévő

$$u = \mathrm{Re}\,u + i\,\mathrm{Im}\,u$$,ahol Re*u* és Im*u* valós számok,

akkor

$$\underset{\sqcup}{u} = \mathrm{Im}\,u + \mathrm{th}\,\mathrm{Re}\,u, \quad u \in \overset{\sqcup}{R}$$

A „zászló” alapján jól látszik, hogy a valós számok (látható robbantott számok) éppen azok, amelyek a (-1) és az 1 robbantottjai közé esnek. A (-1) robbantottja az a legnagyobb robbantott szám, amelyik minden valós számnál kisebb, az 1 robbantottja az a legkisebb robbantott szám, amelyik minden valós számnál nagyobb.
Filozófiai értelemben az összes láthatatlan robbantott szám az aktuális végtelen kategóriába tartozik. Éppen ezért, szeretnénk velük műveleteket is végezni, amelyeket szuper – összeadás, szuper – szorzás, szuper – kivonás és szuper – osztás néven fogunk említeni.

$$u \oplus v = \overset{\sqcup}{\left(\underset{\sqcup}{u} + \underset{\sqcup}{v}\right)}; v \in \overset{\sqcup}{R}, \quad (\mathrm{super-addition}),$$

$$u \odot v = \overset{\sqcup}{\left(\underset{\sqcup}{u} \cdot \underset{\sqcup}{v}\right)}; v \in \overset{\sqcup}{R}, \quad (\mathrm{super-multiplication}),$$

$$u \ominus v = \overset{\sqcup}{\left(\underset{\sqcup}{u} - \underset{\sqcup}{v}\right)}; u, v \in \overset{\sqcup}{R}, \quad (\mathrm{super-subtraction})$$

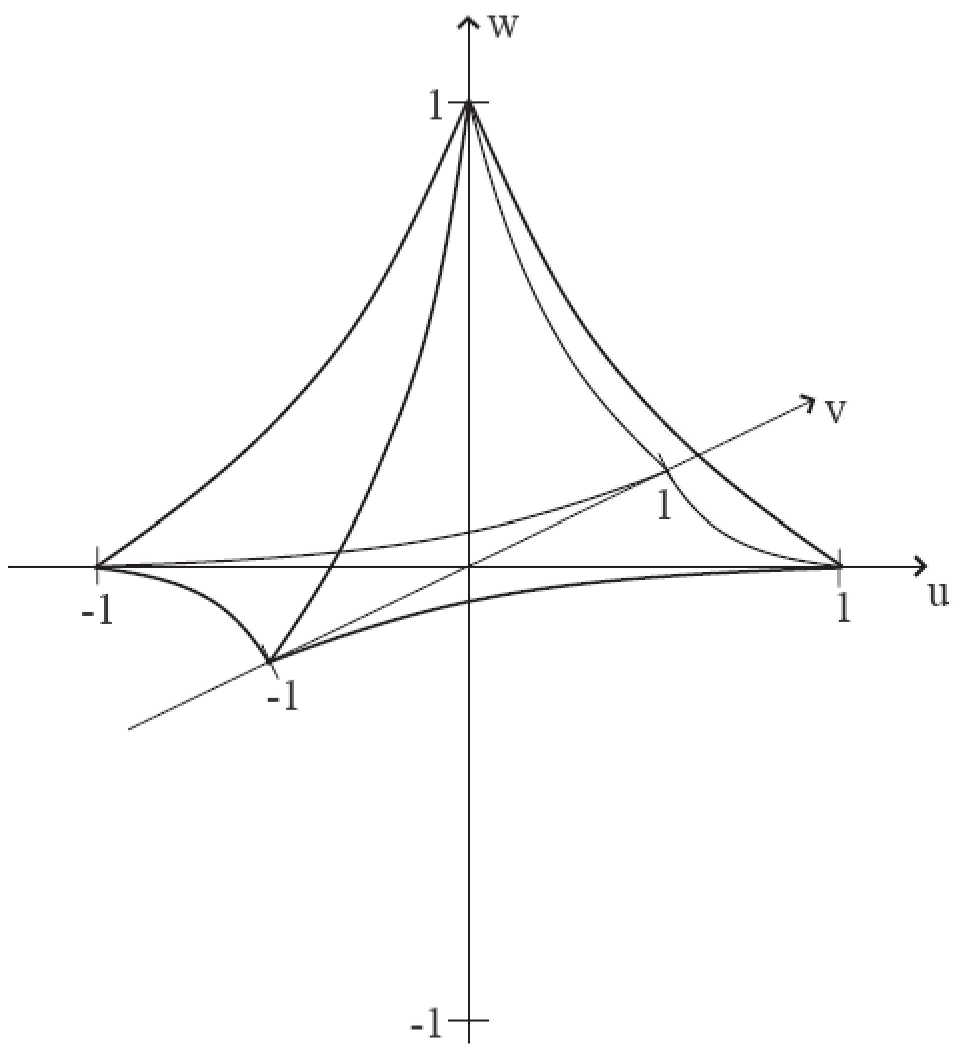
$$\underset{v}{\overset{u}{\sim}} = \overset{\sqcup}{\left(\frac{\underset{\sqcup}{u}}{\underset{\sqcup}{v}}\right)}; \; u, v(\neq 0) \in \overset{\sqcup}{R}, \quad (\mathrm{super-division}).$$

Ezekkel a műveletekkel írjuk le az alábbi kétváltozós függvényt.

$$w = \mu \odot \left(\overset{\sqcup}{1} \ominus \left(\underset{\gamma}{\overset{|u|}{\sim}} \oplus \underset{\gamma}{\overset{|v|}{\sim}}\right)\right)$$

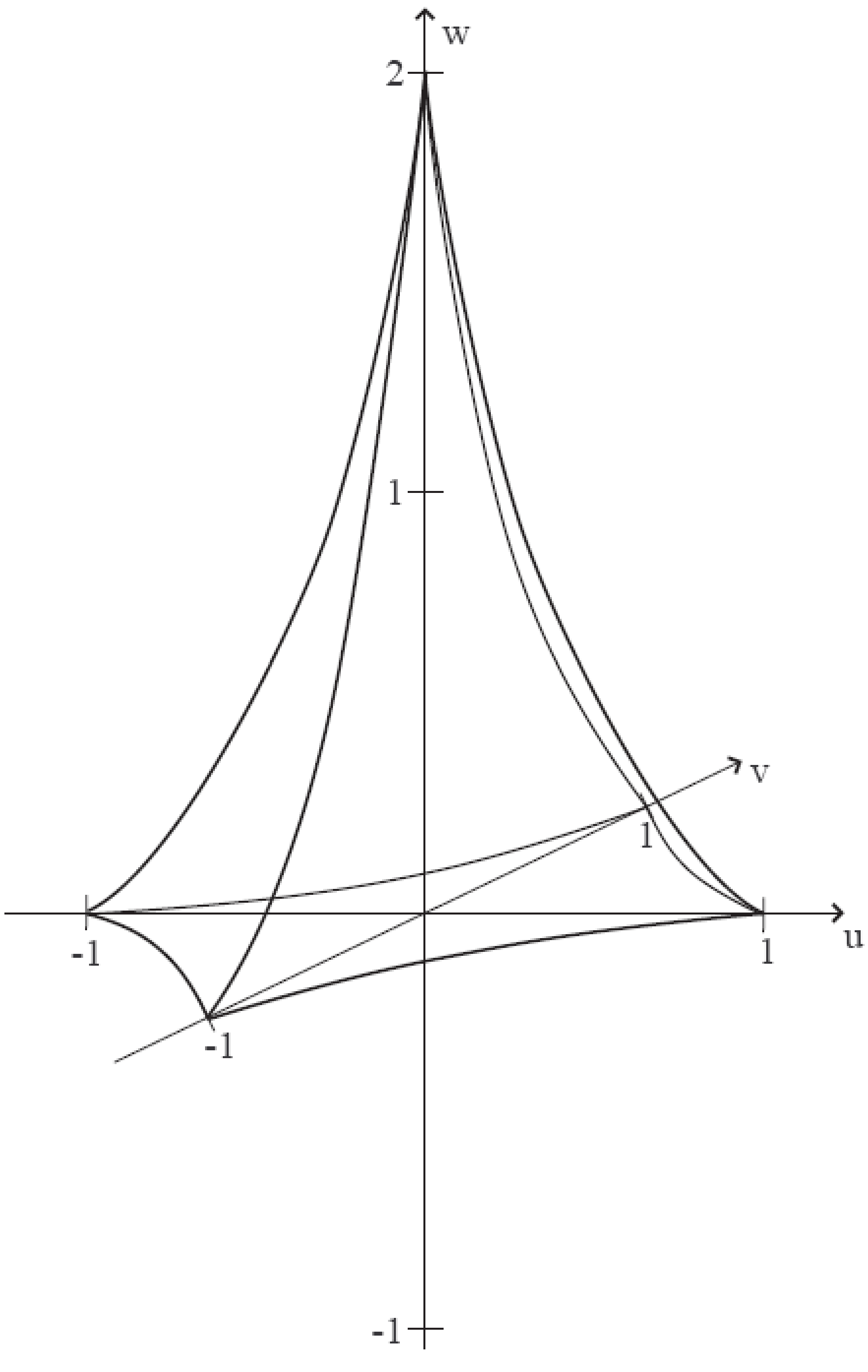
Az u és v a független, $w(\geq 0)$ a függő változó, $\gamma = 1$ állandó, μ pedig változó paraméter. Az egyenletet a számítógépbe táplálva, le fogja rajzolni e két változós függvény grafikonjának az „u,v” koordináta- síkon illetve felette lévő részét, ami egy, a három dimenziós tér koordináta-rendszerében ábrázolható felület. Legyen rendre $\mu = 1$, $\mu = 2$, μ az 1 robbantottja (ekkor u = v = 0 esetben w is az 1 robbantottja, azaz w nem lehet a függőleges koordináta tengelyen, hiszen az egy számegyenes) és végül μ az 1,5 robbantottja (ekkor u = v = 0 esetben w is az 1,5 robbantottja, azaz w nem lehet a függőleges koordináta tengelyen, hiszen az egy számegyenes). Íme, a számítógép ábrái:

$\mu = 1$



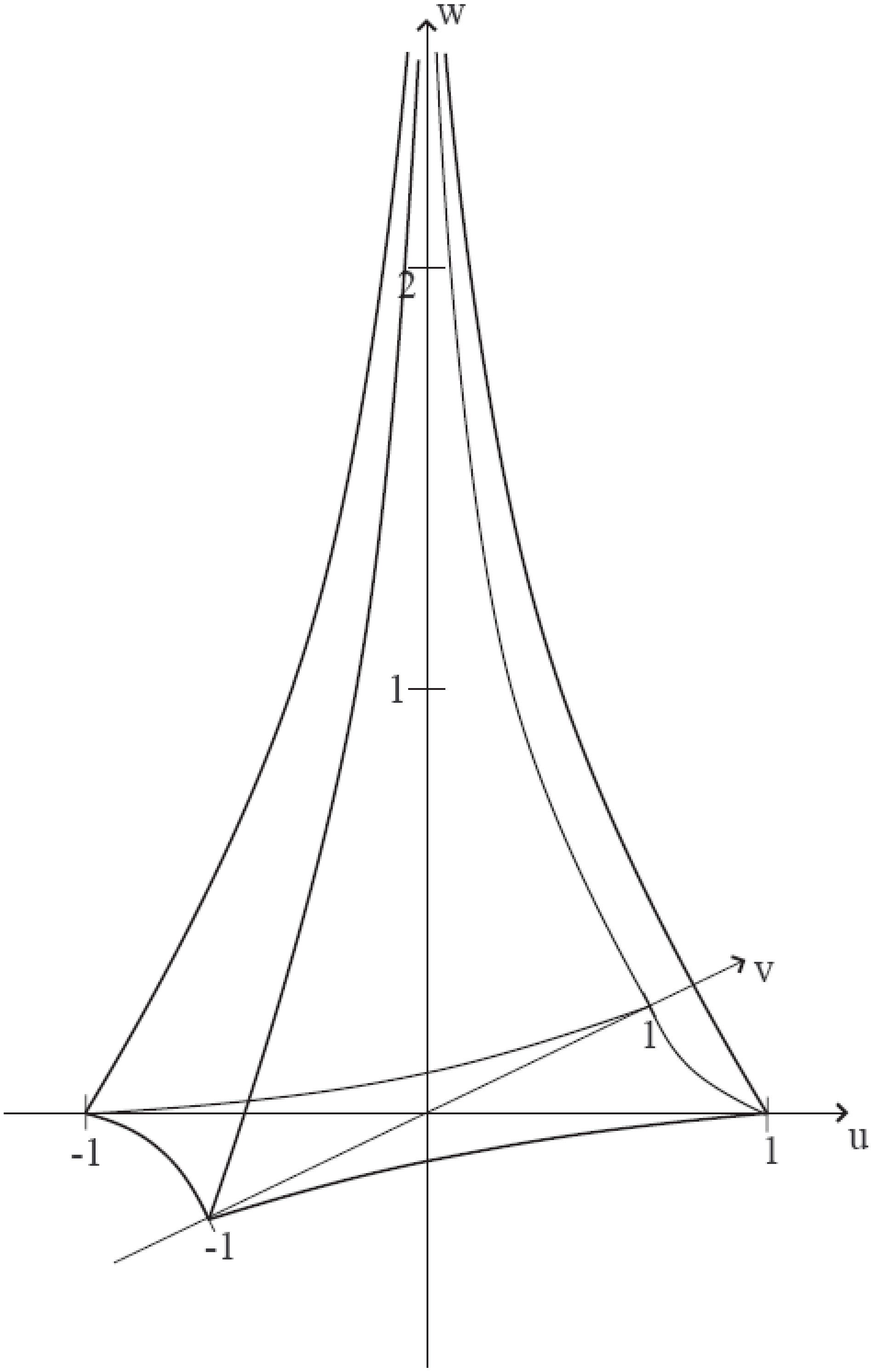
Ez, egy kicsi, w = 1 magasságú, Bábel torony.

$\mu = 2$



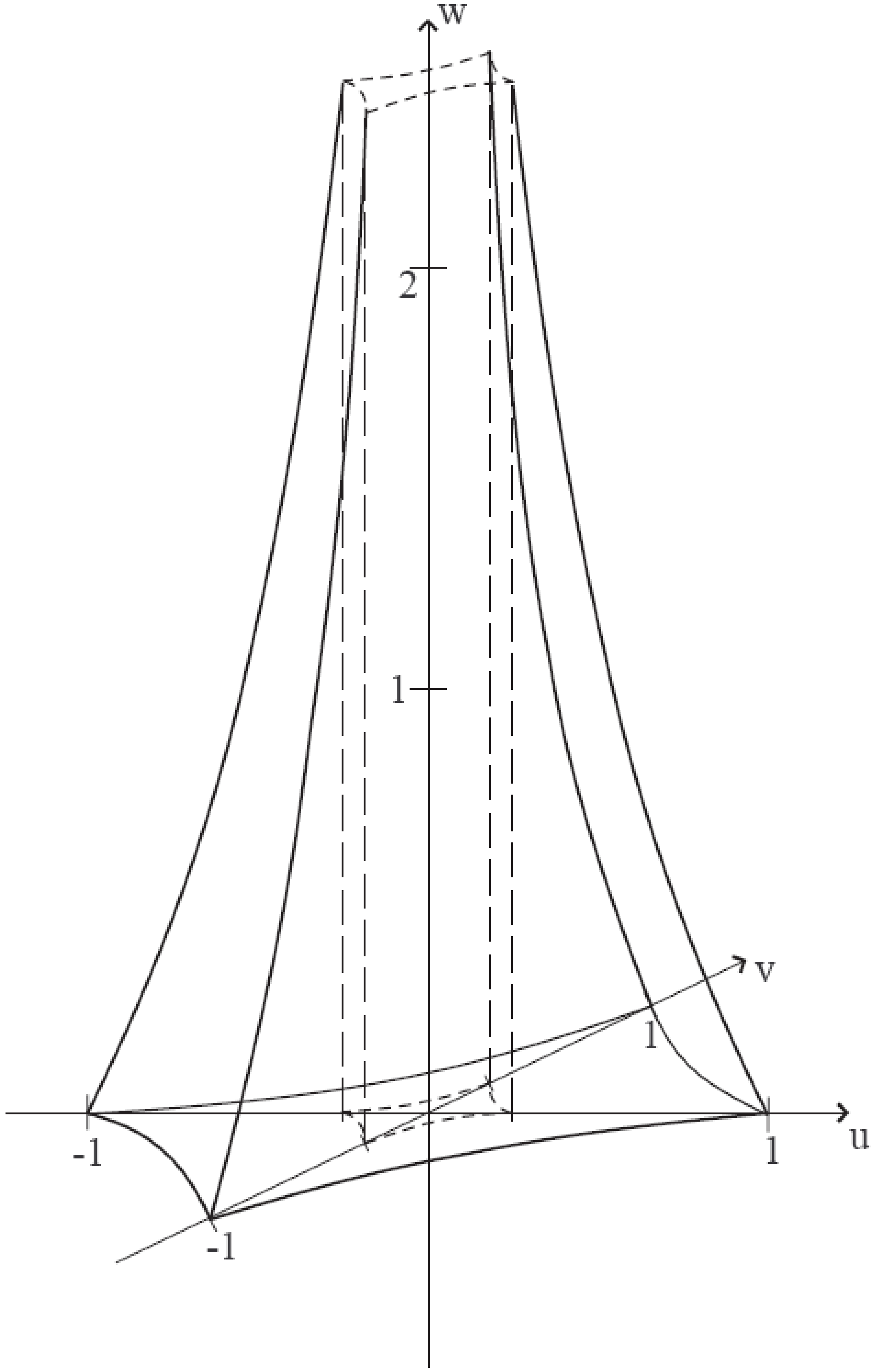
Ez, egy „növésben lévő” (w = 2 magasságú) Bábel torony.

$\mu = \frac{\sqcup}{1}$



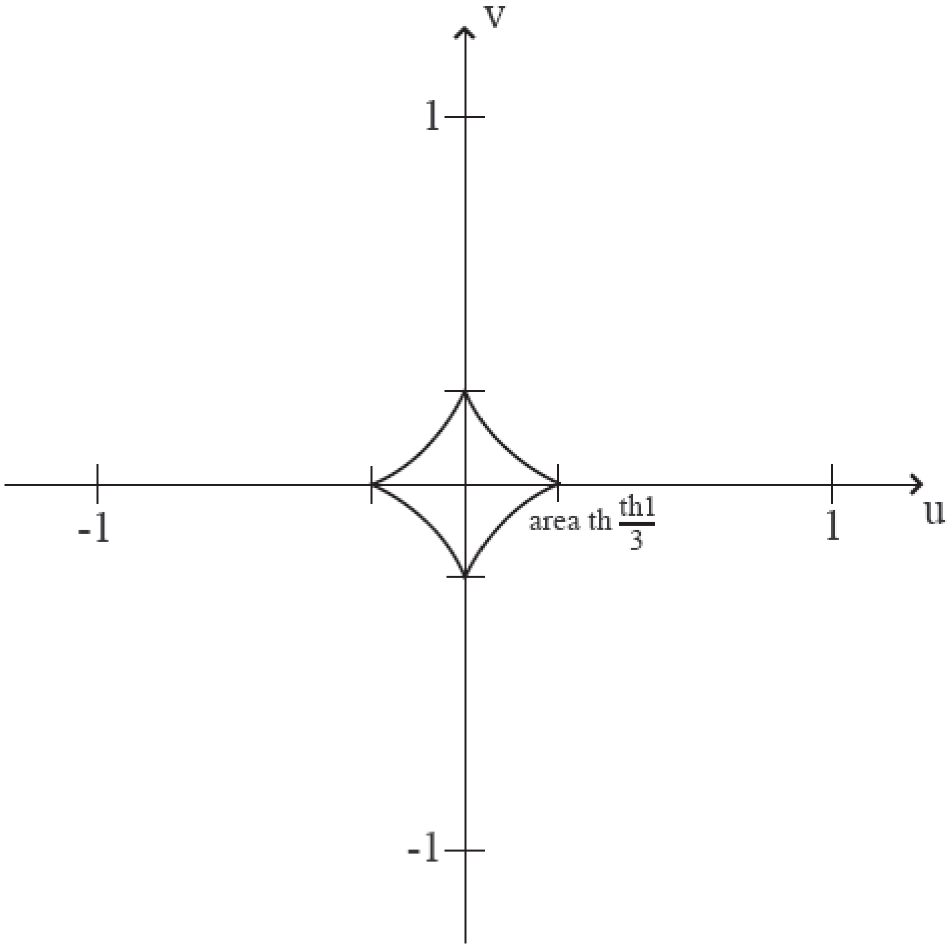
A Bábel torony csúcsa elérte a három dimenziós tér (láthatatlan) határát.

$\mu = \boxed{1,5}$

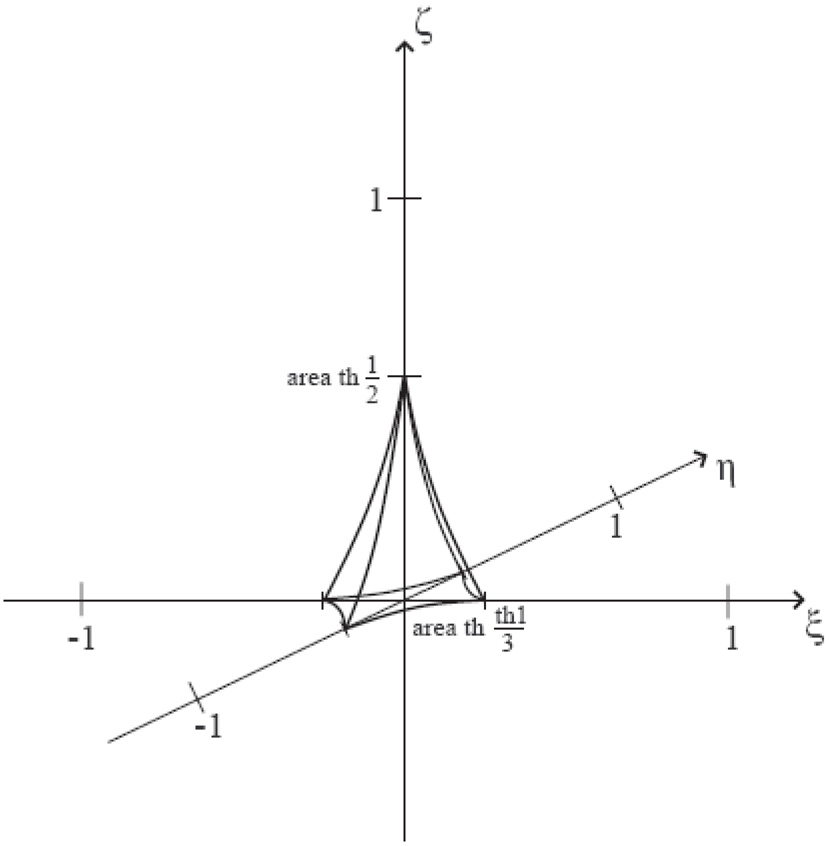


A Bábel torony csúcsa a háromdimenziós tér határa „felett” van.

Ha felmegyünk a háromdimenziós tér „felső” határára (ami a robbantott számokkal megvalósítható), és ott körülnézünk, akkor meglátjuk azt a vonalat is, amelyben a Bábel torony átmetszi a háromdimenziós tér határát. (Ennek a metszésvonalnak a közelítő vetülete az előző ábra Bábel tornyának alapján látható szaggatott vonal.)



és ha ott felfelé tekintünk, a következő ábrán láthatjuk a Bábel toronynak a mi eredeti háromdimenziós terünkből kinyúló részét is:



A részletes számításokat *The super-pyramid* című cikkem tartalmazza.[420]

[420] SZALAY, István, *The super-pyramid*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 46. No 3, 2008, 337–346.

István Szalay

Traces of identity in the development of the notion „number”

Numbers, counting and computing interweave our everyday lives so much that we tend to forget that the existence of numbers is not natural, they are created by the human mind in the course of human activities. The origin of numbers goes back so far in history that, for instance, the numbers signed by the symbols 1, 2 and 3 are called natural numbers. We know, however, that they were not signed like that in ancient times, and they have had different names in different languages then and nowadays alike. From that we may conclude that numbers with identical content and different form were invented in different periods by different civilisations all over the world having no contact with each other. The identity of certain civilisations that has been retained by language is conserved in names but faded out as the form became globalised. Four thousand years ago the shape of Egyptian and Mesopotamian numbers mirrored the identity of the civilisations that created them. Globalisation may have started in the civilisations of Ancient Egypt, Mesopotamia and India (the latter with Chinese contacts) enriched by the influence of the Hellenistic world. The Roman Empire planted it over to the Europe of the Middle Ages, mediated by the Arabs. In this process the best qualities of the different and sophisticated number systems prevailed and merged. This means that in the present-day form that was gradually modified while the content also changed, almost invisible identity traces of connected civilisations can be detected. In the present paper some of these will be pinpointed. We will also touch upon the existence of numbers as actual infinity and the theory of exploded numbers.